



Revista Latinoamericana de Investigación
en Matemática Educativa

ISSN: 1665-2436

relime@clame.org.mx

Comité Latinoamericano de Matemática
Educativa

Organismo Internacional

D'Amore, Bruno; Fandiño Pinilla, Martha Isabel; Iori, Maura; Matteuzzi, Maurizio
ANÁLISIS DE LOS ANTECEDENTES HISTÓRICO-FILOSÓFICOS DE LA "PARADOJA
COGNITIVA DE DUVAL"

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, vol. 18, núm. 2,
2015, pp. 177-212

Comité Latinoamericano de Matemática Educativa
Distrito Federal, Organismo Internacional

Disponible en: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33540064003>

- Cómo citar el artículo
- Número completo
- Más información del artículo
- Página de la revista en redalyc.org

The logo for redalyc.org features the text "redalyc.org" in a red, lowercase, sans-serif font. A red graphic element, resembling a stylized 'r' or a flame, is positioned to the right of the text.

Sistema de Información Científica

Red de Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal

Proyecto académico sin fines de lucro, desarrollado bajo la iniciativa de acceso abierto

ANÁLISIS DE LOS ANTECEDENTES HISTÓRICO-FILOSÓFICOS DE LA “PARADOJA COGNITIVA DE DUVAL”

ANALYSIS OF THE HISTORICAL AND PHILOSOPHICAL ANTECEDENTS OF “DUVAL’S COGNITIVE PARADOX”

RESUMEN

En un famoso artículo publicado en 1993, Raymond Duval evidenciaba el siguiente hecho: *el estudiante puede confundir el objeto matemático O , que está tratando de construir cognitivamente, con una determinada representación semiótica $R(O)$ de dicho objeto*. Explicaba que esta confusión se debía a una especie de paradoja inevitable: sólo quien ha construido el objeto O , puede reconocer $R(O)$ como representación de O y no como objeto en sí. Esta reflexión tuvo una gran influencia en los investigadores en los años sucesivos. Pero, varios estudiosos de semiótica, si bien es cierto que no lo dicen con estas mismas palabras, ya habían evidenciado el fenómeno. En este escrito nos proponemos estudiar algunos de ellos.

PALABRAS CLAVE:

- Paradoja cognitiva de Duval
- Semiosis y noesis
- Construcción cognitiva del objeto matemático
- Representación semiótica de un objeto matemático

ABSTRACT

In a famous article published in 1993, Raymond Duval highlighted a simple fact: *the student may confuse the mathematical object O he is trying to build cognitively with one of its semiotic representations $R(O)$* . Duval explained that this confusion was due to a sort of inevitable paradox: only someone who has already built O , can recognize $R(O)$ as a representation of O and not as an object in itself. Thereafter, this thought has been extremely influential for researchers. However, even if in different terms, many scholars of semiotics have emphasized the same phenomenon. In this paper we propose to remind some of them.

KEY WORDS:

- Duval's cognitive paradox
- Semiosis and noesis
- Cognitive construction of mathematical objects
- Semiotic representations of a mathematical object



RESUMO

Em um célebre artigo publicado em 1993, Raymond Duval mostrou o seguinte fato: *o aluno pode confundir o objeto matemático O, que está tentando construir cognitivamente, com uma representação semiótica especial R (O) do objeto*. Ele explicou que esta confusão foi devido a uma espécie de paradoxo inevitável: só quem que construiu o objeto O, pode reconhecer R (O) como representação de O e não como o próprio objeto. Esta reflexão teve uma grande influência em os investigadores nos anos seguintes. Mas, vários estudiosos da semiótica, embora eles não dizem, certamente, em essas palavras, já haviam evidenciado o fenômeno. Neste trabalho, propomos-nos estudar alguns deles.

PALAVRAS CHAVE:

- Paradoxo cognitivo Duval
- Semiose e noesis
- Construção cognitiva de objeto matemático
- Representação semiótica de um objeto matemático

RÉSUMÉ

Dans un célèbre article publié en 1993, Raymond Duval a révélé le fait suivant: *l'étudiant peut confondre l'objet mathématique O, qui tente de construire sur le plan cognitif, avec une représentation sémiotique particulier R(O) de l'objet*. Il a expliqué que cette confusion était due à une sorte de paradoxe inévitable: seul celui qui a construit l'objet O, peut reconnaître R(O) comme représentation et non pas comme l'objet lui-même O. Cette pensée a eu une grande influence sur la recherche dans les années suivantes. Mais plusieurs spécialistes de la sémiotique, mais pas le dire avec les mêmes mots, avaient déjà démontré le phénomène. Dans cet article, nous proposons d'étudier certains d'entre eux.

MOTS CLÉS:

- Paradoxe cognitive Duval
- Semiosis et Noesis
- Construction cognitive de l'objet mathématique
- Représentation sémiotique d'un objet mathématiques

1. PREMISA

Los estudios de Raymond Duval abrieron, indudablemente, una nueva línea de investigación internacional en Didáctica de la Matemática, tanto teórica como práctica; reconocer que uno de los mayores obstáculos en el aprendizaje de la Matemática está relacionado con las características específicas del único instrumento posible de su denotación, los sistemas semióticos, ha abierto caminos hasta hace algunos tiempos inexplorados. A partir de los '90, un gran número de estudiosos de todo el mundo, cada vez con mayor profundidad, están afrontando el tema. Afirmamos que en la actualidad éste es uno de los temas de mayor difusión en el mundo, en ámbito investigativo.

Precisamente por el hecho de que hoy es considerado un tema clásico, nos sentimos autorizados a abrir otra línea de investigación en esta misma temática, la línea histórico-epistemológico-filosófico-crítica, para encontrar una ascendencia consolidada e ilustre de las reflexiones del psicólogo francés Raymond Duval.

Un “instrumento matemático”, una vez consolidado, se hace “objeto matemático” de conocimiento e inicia, por tanto, una caracterización histórica que lo teoriza al interior de un sistema que tiene como representantes diversos estudiosos; generalmente no especialistas del ámbito, en nuestro caso no necesariamente didácticos, sino filósofos principalmente. Es esto lo que sucede con todos los “instrumentos matemáticos”, una vez que se convierten en objetos de la Matemática (Douady, 1986; Sfard, 1991).

Más adelante aludiremos a la temática introducida por Duval bajo la forma de paradoja cognitiva. Mostraremos y comentaremos, brevemente, sin ninguna intención de exhaustividad, algunos precedentes: autores que han sostenido sustancialmente la misma tesis de este estudioso, en diversos ámbitos, todos filosóficamente relevantes.

Debemos hacer notar que citaremos explícitamente investigadores contemporáneos que publicaron alguna frase análoga a la de Duval, no quienes, de alguna forma, afrontaron temas similares.

Nuestro objetivo no es delinear una posición específicamente teórica relacionada con el tema que aparece en el título; nuestro objetivo es el de evidenciar cómo, en repetidas ocasiones, o tal vez siempre, las ideas que cambian el curso de los estudios relativos a una disciplina o a una teoría, tuvieron precedentes ilustres que es necesario tomar en consideración para entender mejor y con mayor profundidad dichas ideas. Un estudio histórico-filosófico de este tipo nos parece que reviste cierto interés en quien se ocupa profesionalmente de los temas en cuestión, en este caso de la Didáctica de la Matemática en relación con el uso de registros semióticos para el acceso a los objetos matemáticos y proponerlos para el aprendizaje de los estudiantes.

Aceptamos la existencia de la paradoja cognitiva de Duval de la forma como él la presentó hace 20 años aunque, es evidente, que con el pasar del tiempo, los estudios de dicho autor, de otros, incluso nuestros, llevaron a reflexiones cada vez más profundas y críticas. Por tanto, en este artículo se acepta y se examina la paradoja como se presentó históricamente en 1993. Nuestro trabajo pretende realizar un análisis histórico que, en un futuro, puede fungir como sustento para un análisis crítico posterior. Si bien durante el curso del texto se realizarán referencias a la praxis didáctica de enseñanza-aprendizaje – sin entrar en los detalles que amerita una reflexión al respecto – hacemos explícito que este estudio no pretende brindar una consecuencia didáctica, sino que estará focalizado en un análisis histórico.

2. RAYMOND DUVAL

Veamos cómo Raymond Duval enunciaba, hace 20 años, su famosa *paradoja cognitiva del pensamiento matemático*, la cual tuvo una fuerte repercusión:

(...) por un lado, el aprendizaje de los objetos matemáticos sólo puede ser un aprendizaje conceptual y, por el otro, es sólo a través de representaciones semióticas que es posible una actividad sobre los objetos matemáticos. Esta paradoja puede constituir un verdadero círculo vicioso para el aprendizaje. ¿Cómo, sujetos en fase de aprendizaje, podrían no confundir los objetos matemáticos con sus representaciones semióticas si ellos únicamente pueden tener relación con las representaciones semióticas? La imposibilidad de un acceso directo a los objetos matemáticos, más allá de cualquier representación semiótica, hace la confusión casi inevitable. Y, por el contrario, ¿cómo pueden los estudiantes adquirir el dominio de los tratamientos matemáticos, necesariamente ligados a las representaciones semióticas, si no tienen el dominio conceptual de los objetos representados? Esta paradoja es aún más fuerte si se identifica actividad matemática con actividad conceptual y si se consideran las representaciones semióticas como secundarias o extrínsecas. (Duval, 1993, p. 38; la traducción es nuestra, concordada con el Autor)¹

En las últimas líneas del texto de Duval ya se explica cómo debe entenderse la paradoja cognitiva: el docente propone al estudiante representaciones semióticas de un objeto matemático con la intención que el estudiante lo construya cognitivamente; pero lo único que puede hacer es proponerles representaciones semióticas dado que no existe forma alguna de mostrar, indicar (en el sentido etimológico de la palabra), dicho objeto; el estudiante entra, por tanto, concretamente en contacto con representaciones, no con el objeto, aprende a hacer referencia a dichas representaciones, no al objeto, y a manipularlas. Parecería un itinerario destinado al fracaso cognitivo. Y, por el contrario, el estudiante, al final, aprende, construye, hace propio el objeto, en una situación que tiene mucho de paradójica y que es de gran interés estudiar siempre más en profundidad.

¹ El texto reportado es el que se encuentra en Duval (1993); siendo pasados más de veinte años, es obvio que todos nosotros y en particular el mismo autor identifiquen en dicho texto frases que podrían ser escritas de otra forma, incluso teniendo cuenta de los estudios críticos sucesivos llevados a cabo por el mismo Duval y por otros investigadores. Pero nuestro objetivo no es crítico-analítico, queremos sólo hacer una reseña histórica y por tanto debemos aceptar los textos por lo que son en origen y usar las fuentes de forma correcta, sin aportar modificaciones.

En la sistematización teórica de Duval, las representaciones semióticas de un objeto matemático deben ser interpretadas como una operación explícita de designación, distintas del objeto matemático (abstracto, ideal, que constituye un invariante de ellas) a la cual hacen referencia; del cual son, precisamente, representaciones.

Si se le pregunta a un niño pequeño: ¿qué es “el número tres”? él mostrará tres dedos, alzando la mano derecha. La pregunta tiene que ver con el objeto matemático “tres” pero tiene como respuesta una representación semiótica de dicho objeto, normalmente sólo una. Si se le plantea la misma pregunta a un niño que está terminando la escuela primaria, él seguramente escribirá con un lápiz en una hoja de papel la cifra 3. Cambia la representación, pero el problema de la diferencia entre objeto matemático y su representación permanece. Sin duda, la pregunta va más allá de la capacidad de los sujetos: una pregunta con esta carga epistemológica no puede tener otra respuesta por parte de los niños, y las cosas no cambian con el pasar del tiempo.

Si se pregunta a un joven de quince años: ¿qué es una recta?, podemos tener como respuesta el dibujo de una mancha de grafito, derecha, más o menos larga y delgada; o una ecuación lineal del tipo $ax+by+c=0$, escrita con un lápiz sobre una hoja de papel. En los dos casos se trata de representaciones semióticas del objeto matemático pedido, no es el objeto matemático al cual se hace referencia.

Si se pregunta a un estudiante de los últimos años de la secundaria: ¿qué es una derivada?, él escribirá $f'(x)$, ofreciéndonos una representación semiótica, cuando la pregunta hace referencia al objeto matemático “derivada”. Y esta historia prosigue en la universidad, sin muchos cambios.

Sólo un experto intentaría dar un respuesta epistemológicamente significativa a la pregunta planteada sobre un objeto matemático, mostrando dos (o más) representaciones semióticas de este, reconociendo que una única representación semiótica del objeto matemático no permite agolpar todos los componentes conceptuales del objeto, o aquellos más idóneos a la situación (D'Amore, Fandiño Pinilla e Iori, 2013). En otras palabras, no permite transformación alguna (tratamiento o conversión) de la representación, por tanto, no permite *objetivación* alguna, que se tiene que entender aquí como la toma de conciencia sobre éste (referido objeto), del cual no se era consciente antes de producir (por sí mismos) una representación (Duval, 1995).

Por otro lado, demasiadas representaciones tienden a confundir al aprendiz, puede ser que no todas sean relevantes conceptualmente hablando y, por tanto, no favorecer la construcción cognitiva del objeto (D'Amore et al., 2013). La multiplicidad de las representaciones y de sus transformaciones debe

ser estudiada, monitoreada y calibrada con atención en todo contexto o situación. Esto requiere por parte del docente una formación específica, que no se adquiere espontáneamente, ni tan sólo con la “experiencia”. Una formación que no se centre sólo en los contenidos matemáticos específicos a enseñar, en las actividades a desarrollar, en las situaciones o en los problemas a proponer, para introducir un determinado contenido y para afrontar un determinado examen, sino también, y básicamente, sobre la dimensión epistemológica (que traduce la exigencia, transversal a todos los conocimientos, de no confundir los objetos con sus representaciones, y que se encuentra también en la *República*, VI, 509d–510b, de Platón) y sobre la dimensión semiótica y cognitiva peculiar de la Matemática (para profundizar tales aspectos véase: Duval, 2009b, 2011, 2012).

La caracterización semio-cognitiva de los objetos matemáticos que Duval (1995, 1998a, 1998b, 2006, 2009a, 2009b, 2011, 2012) propone, tiene como objetivo el de ofrecer diversos instrumentos para intervenir eficazmente en las dificultades que los estudiantes encuentran en la gestión de las representaciones semióticas de los objetos matemáticos. Un objeto matemático no es otra cosa que el invariante (operatorio o lógico-discursivo) de una multiplicidad de representaciones semióticas posibles (Duval, 1995, 2009b, 2011). Dicha caracterización no requiere hipótesis alguna sobre “existencia” o “pre-existencia”, “construcción dentro de sí” o “comprensión en sí” del objeto matemático; en otras palabras, ninguna interpretación filosófica (de tipo realista o idealista, constructivista o platónica) puede ser deducida de la caracterización semio-cognitiva que Duval da de los objetos matemáticos. El objeto de conocimiento emerge del reconocimiento de que dos o más representaciones semióticas son representaciones de un “mismo objeto”, aunque sus contenidos no tienen nada en común. Sin embargo, como ya lo hemos enunciado, el objeto matemático se distingue de los objetos de las otras disciplinas científicas por la modalidad de acceso, meramente semiótico, no perceptivo (directo o instrumental), es decir, el objeto matemático emerge meramente de la actividad específica de producción y de transformación (tratamientos y conversiones) de signos oportunos (representaciones semióticas) dentro o entre particulares sistemas semióticos (registros de representación). La falta de un doble acceso, semiótico o perceptivo (directo o instrumental), a los objetos matemáticos lleva casi inevitablemente a confundir una cierta representación de un determinado objeto matemático, $R(O)$, con el mismo objeto O (Duval, 1993); obstaculizando así, la construcción cognitiva del objeto, es decir, la gestión de las representaciones semióticas de las cuales el objeto matemático emerge como invariante.

Para la comprensión de los procesos de aprendizaje de la Matemática, la cuestión relevante que Duval afronta no es si los objetos matemáticos vienen antes o después de la actividad matemática, antes o después de las prácticas

institucionales o personales, o antes o después de las representaciones semióticas, sino que es la siguiente: “¿Cómo no confundir un objeto matemático con una representación semiótica del objeto en cuestión, si no es posible acceder al objeto matemático sin producir (implícitamente o explícitamente) una representación semiótica?” (Duval, 2006, p. 69).

Esta cuestión es ignorada por numerosos estudios de los aspectos semióticos y cognitivos de los procesos de aprendizaje, de todos aquellos que asumen implícitamente que los procesos cognitivos de aprendizaje sean idénticos en todos los campos del conocimiento: en Matemática como en Biología, Física o Química, entre otros. El enfoque pragmatista de tradición peirceana y el enfoque constructivista de tradición piagetiana constituyen dos ejemplos.

Para la enseñanza-aprendizaje de la Matemática, por tanto, la cuestión de cómo se puede acceder a los objetos matemáticos se vuelve crucial, y es relacionada estrechamente con aquella de los procesos semio-cognitivos, específicamente aquellos movilizados en Matemática, es decir, con la producción o con la elección de representaciones semióticas en los oportunos registros y su movilización (implícita o explícita) en dos tipos de transformaciones: tratamiento (transformación de una representación a otra del mismo tipo, es decir, en el mismo registro semiótico, del mismo objeto) y de conversión (transformación de una representación semiótica en otra de tipo diferente, es decir, en otro registro, del mismo objeto). Está en esto, precisamente, la construcción cognitiva del objeto matemático (D’Amore et al., 2013). De aquí la necesidad de tomar conciencia del fenómeno para poder reconocer, interpretar y afrontar las dificultades de comprensión que el aprendizaje de la Matemática inevitablemente evidencia en todos los niveles escolares.

A nuestro criterio, Raymond Duval tenía razón cuando afirmaba: *no existe noética sin semiótica* (1993). Hoy sabemos que debemos pasar a través de varias representaciones semióticas para alcanzar la gradual y consciente construcción cognitiva del objeto, es decir, lograr que el aprendiz se dé cuenta que, frente a un objeto O , existen varias representaciones semióticas $R_i(O)$ de O ($i = 1, 2, 3, \dots$). El día en el cual dominará dichas representaciones, las sabrá usar en contextos oportunos y las podrá transformar las unas en las otras, entonces podremos decir que el estudiante ha construido cognitivamente O . Esta es la propuesta filosófica-didáctica de D’Amore (2003).

Pero, como ya hemos dicho, la posición de Duval tiene análogas, ilustres y precedentes enunciaciones que mostraremos y analizaremos con el fin de evidenciar el hecho de que su posición no es un *unicum* en la historia de lo que podemos llamar *semiótica en el aprendizaje*. En otras palabras, una posición cercana a aquella de Duval se encuentra en varios pensadores antecedentes y contemporáneos, no necesariamente estudiosos de la Didáctica.

3. LOS ANTECEDENTES FILOSÓFICOS O SEMIÓTICOS

La relación entre conocimiento, lenguaje, mundo, nos lleva a un problema semántico milenario, a la problemática de explicar qué es el *significado*, es decir, disponer de un marco teórico que muestre las relaciones entre palabras, ideas y cosas, problema que se inserta directamente en la Teoría del conocimiento, o Gnoseología, y en aquella del ser, u Ontología. De hecho, estamos en el punto de apoyo de toda theoresis filosófica. Aquí deberíamos, como consecuencia, describir todo el desarrollo del pensamiento humano. Sin embargo, nuestra intención dista de querer ser exhaustivos en este aspecto, sino que procuraremos hacer referencia a lo que nos compete para nuestro estudio actual.

3.1. *Platón* (-427 – -347)

Se considera a Platón como un punto de referencia de toda la filosofía sucesiva. La teoría platónica del conocimiento y, en consecuencia, de la Pedagogía, se centra en la asunción de que el alma humana tuvo una vida precedente, en el mundo de las ideas, o en el *hiperuranio* (literalmente: más allá del cielo). Ésta es una breve síntesis de la célebre teoría de la *anamnesis*: el conocimiento es recuerdo, recuperar lo que en un tiempo fue conocido por contacto directo. La directa consecuencia en el plano pedagógico es evidente: nada pasa del maestro al discípulo, lo que sucede es que el maestro suscita en el discípulo un proceso de reminiscencia, ayudándole a ‘recordar’. Surge inmediatamente por tanto la idea de que quien aprende debe cumplir un proceso del todo interior, encontrando dentro de sí el conocimiento, la verdad.

Ahora bien, pensemos en estos términos la paradoja cognitiva de la cual nos estamos ocupando: ¿cómo puede el aprendiz buscar dentro de sí aquello que no conoce, dado que él no sabe qué buscar? Todo lo que el maestro puede ofrecer no es obviamente el objeto matemático, sino una expresión (por ejemplo, lingüística) que tiene como objetivo denotarlo (D'Amore y Fandiño Pinilla, 2012). Es así como el estudiante recibe un *denotans* (una expresión) momentáneamente privado de su *denotatum* (el objeto al que la expresión se refiere), dado que él aún no tiene acceso al objeto matemático involucrado. Y, sin embargo, esta incitación puede hacer que el estudiante ‘excave’ dentro de sí en la búsqueda de una imagen (un recuerdo) del ente adecuado que, según Platón, él ya encontró indudablemente en el mundo de las ideas. De aquí derivan todas las teorías pedagógicas que asumen al aprendiz como parte activa, como sujeto y no como un objeto amorfo del proceso de aprendizaje (incluyendo metáforas como la lastra

de mármol no esculpida o no cincelada, el vaso que debe ser llenado, entre tantas). Y esto vale también para otros autores que, a diferencia de Platón, no asumen la hipótesis ontológicamente drástica de la existencia de un oportuno sobre-mundo: para muchos otros autores, también en tiempos modernos, el proceso de aprendizaje se desarrolla totalmente “dentro” del aprendiz, y no es otorgado por el maestro. En el lado opuesto encontramos, notamos de paso, la teoría del *trasiego* que encuentra su máxima expresión en la pedagogía de los Jesuitas.

Por tanto, inferimos de aquí un modelo de la paradoja inicial: lo que transmigra del maestro al alumno es un signo lingüístico considerado en sí mismo, sin ninguna relación con un objeto, una pura posibilidad de funcionar como signo o como representación semiótica de un objeto matemático, para decirlo en términos actuales, y aquí se desencadena el procedimiento de la mayéutica socrática, el educar como *e-ducere* ‘portar afuera’ (en sentido etimológico exacto), de las reminiscencias de la vida precedente, el objeto matemático, un recuerdo, como en el admirable y célebre apartado de la obra del *Menon*, muy bien conocido, en el cual Sócrates induce al esclavo, quien ignora los fundamentos de la geometría, a re-descubrir, a recordar, una verdad geométrica.

Nuestra paradoja se resuelve, según Platón, asumiendo que el alma del aprendiz, humana e inmortal, haya “visto” el objeto matemático en su vida precedente, antes de su nacimiento, que lo haya olvidado en el momento de su nacimiento y que pueda recordarlo en situaciones adecuadas.

Pero en Platón hay mucho más. Tomamos de *República*, VI, 510c–511a (Platón, 1992):

Sócrates: Pues veamos nuevamente; será más fácil que entiendas si te digo esto antes. Creo que sabes que los que se ocupan de geometría y de cálculo suponen lo impar y lo par, las figuras y tres clases de ángulos y cosas afines, según lo investigan en cada caso. Como si las conocieran, las adoptan como supuestos, y de ahí en adelante no estiman que deban dar cuenta de ellas ni a sí mismos ni a otros, como si fueran evidentes a cualquiera; antes bien, partiendo de ellas atraviesan el resto de modo consecuente, para concluir en aquello que proponían al examen.

Glaucón: Sí, esto lo sé.

S: Sabes, por consiguiente, que se sirven de figuras visibles y hacen discursos acerca de ellas, aunque no pensando en éstas sino en aquellas cosas a las cuales éstas se parecen, discurriendo en vista al Cuadrado en sí y a la Diagonal en sí, y no en vista de la que dibujan, y así con lo demás. De las y de estas cosas que dibujan se sirven como imágenes, buscando divisar aquellas cosas en sí que no podrían divisar de otro modo que con el pensamiento.

G: Dices verdad.

S: A esto me refería como la especie inteligible. Pero en esta su primera sección, el alma se ve forzada a servirse de supuestos en su búsqueda, sin avanzar hacia un principio, por no poder remontarse más allá de los supuestos. Y para eso usa como imágenes a los objetos que abajo eran imitados, y que habían sido conjeturados y estimados como claros respecto de los que eran sus imitaciones.

El matemático quiere comunicar el objeto matemático en sí, pero se sirve de imágenes y a aquellas parece que hace referencia, pero las cosas no están así; usa estas imágenes para evocar ideas en sí, el cuadrado en sí, la diagonal en sí, objetos que “no podría divisar de otro modo que con el pensamiento”. Platón no tiene intención de hacer un discurso didáctico, sino en general matemático, y termina con capturar el sentido de la cosa desde un punto de vista mucho más amplio.

3.2. *Aristóteles* (-384 – -322)

En los escritos de lógica de Aristóteles encontramos el primer tratado dedicado al lenguaje, *Sobre la interpretación* (*De interpretatione*, en latín; *Peri hermeneias*, en griego). Desde las primeras palabras, Aristóteles proporciona una teoría del significado:

Así, pues, lo [que hay] en el sonido son símbolos de las afecciones [que hay] en el alma, y la escritura [es símbolo] de lo [que hay] en el sonido. Y, así como las letras no son las mismas para todos, tampoco los sonidos son los mismos. Ahora bien, aquello de lo que esas cosas son signos primordialmente, las afecciones del alma [son] las mismas para todos, y aquello de lo que éstas son semejanzas, las cosas, también [son] las misma. (Aristóteles, *Sobre la interpretación*, 1)

Por tanto, las letras escritas son símbolos de los sonidos de la voz; los sonidos de la voz son símbolos de las afecciones del alma y las afecciones del alma son semblanzas o imágenes de las cosas (*pragmata*). Mientras las cosas y las afecciones del alma son *las mismas para todos* los seres humanos, las expresiones lingüísticas que convencionalmente designan las afecciones del alma, no lo son. Así, mientras existe una relación convencional, arbitraria, entre las expresiones lingüísticas y las afecciones del alma, entre estas últimas y las cosas existe una relación motivada, icónica, basada en una semejanza “natural”. Las cosas se conocen a través de las afecciones del alma, sin que exista conexión directa entre las cosas y las expresiones lingüísticas que a esas reenvían. Las expresiones lingüísticas, por tanto, son símbolos no de las cosas, sino de las ‘afecciones del alma’, conexas a dichas cosas.

Pero, ¿qué son exactamente estas ‘afecciones del alma’, cuya compartición es garantía de nuestro entendernos mutuamente? La expresión aristotélica es *pathémata tes psichés*. Ahora bien, *páthema* viene del verbo *pascho*, padecer, una de las categorías aristotélicas, en contraposición de *ago*, actuar. Y es así como nos encontramos frente a esquemas conceptuales recibidos del intelecto, que los acepta pasivamente. En este sentido estos son, por tanto, *objetivos* y por ende, a mayor razón, *inter-subjetivos*. Estos, a su vez, están por los objetos, que son los mismos para todos. Entonces, la estructura explicativa del problema del significado es la siguiente: las afecciones del alma, es decir, los objetos mentales (conceptos, pensamientos o entidades mentales), son imágenes de cosas y nosotros expresamos los objetos mentales a través de signos lingüísticos, que no son los mismos para todos, y prueba de esto es la multitud de idiomas. Pero el compartir de los objetos mentales (nótese que Aristóteles usa, para alma, *psichés*, que también podría ser correctamente traducido como ‘mente’) permite, por fin, compartir los significados.

¿Cómo se presenta entonces nuestra paradoja? La situación, aún en ausencia de la hipótesis del sobre-mundo, no presenta grandes diferencias con respecto a la de Platón: el maestro ofrece signos que, para él, son símbolos de objetos mentales; mientras que para el aprendiz son manchas de tinta o sonidos de la voz, por lo menos en un primer momento, entidades que no designan objeto mental alguno. El aprendiz, recordémoslo, tiene dentro de sí los mismos objetos mentales del maestro, dado que *son los mismos para todos*, y, para entender, debe lograr determinar, dentro de sí, cuál precisamente, entre todos esos, es imagen de las cosas, o similar a ellas (hechos, acciones, prácticas operativas, etc.) que el maestro le está proporcionando.

En otras palabras, para el aprendiz A, una expresión lingüística L significa directamente el objeto mental O si y sólo si O es el objeto mental al cual la expresión L está ligada convencionalmente. L, además, significa indirectamente la cosa C si y sólo si C reenvía al objeto mental O (aquel al cual la expresión L está convencionalmente ligada) gracias a alguna relación de semejanza entre O y C [para un análisis más completo desde un punto de vista filosófico, se recomienda leer a Charles (2000)].

Las categorías de Aristóteles se pueden interpretar como esquemas conceptuales preformados por el intelecto. Esto muestra cómo las distinciones de Aristóteles establecen una interpretación del significado de los “supuestos analíticos”, distintos de las ideas platónicas. Para Aristóteles, sólo las expresiones lingüísticas, las palabras leídas o escuchadas, permiten recordar lo que ya conocemos (afecciones del alma). Así, sólo la escucha, la lectura, las palabras conocidas y recordadas, además de la experiencia adquirida, permiten al aprendiz reconocer lo que tiene la apariencia de mancha escrita, o de sonido

de la voz, como símbolo de un objeto mental que él, aprendiz, ya posee. Se requiere, por tanto, por parte del alumno, del reconocimiento de una relación convencional entre expresión lingüística que es transmitida del maestro a él, en cuanto transmisible, y el objeto mental, no transmitido ni transmisible, pero pre-existente en su mente. Lo que viaja, lo que aparece en el mundo es la expresión como objetivación del pensamiento. En los dos extremos del viaje encontramos los dos objetos mentales: el objeto del maestro y el del estudiante, que se asumen a priori como idénticos. El aprendizaje consiste entonces en el descubrimiento por parte del estudiante de dicha identidad, a través del uso de expresiones que constituyen sus representaciones semióticas.

El aprendizaje debe, de todas formas, partir de cosas familiares o ya conocidas, de cosas observadas, o de expresiones o representaciones lingüísticas o no lingüísticas ya reconocidas como representaciones de objetos mentales. En otras palabras, el aprendiz debe conocer algo de todo aquello que se dispone a aprender. Para Aristóteles, como afirma Eikeland (2008): “Todos los estudiantes tienen necesidad de una forma de ‘conocimiento tácito’ o de una experiencia de la cual partir. Una particular forma de percepción o de comprensión es un pre-requisito y es presupuesta” (p. 257).

Para Aristóteles, nuestra paradoja se resuelve entonces presuponiendo la existencia de objetos mentales, los mismos para todos, a los cuales se puede acceder directamente a través de las expresiones lingüísticas que convencionalmente los designan, pero que es necesario adquirir antes, mediante la lectura o la escucha, además de considerar como medio la experiencia, sea cual sea su naturaleza.

3.3. *La semántica estoica: Zenón de Cizio (-333 – -263), Cleante de Asso (-330 – -232), Crisippo de Soli (-280 – -208)*

Poco tiempo después de la muerte de Aristóteles, pero sobre presupuestos teóricos muy diferentes, nace una teoría semántica igualmente importante, destinada a tener una gran influencia posterior: el estoicismo. Ésta se convertirá en la filosofía griega más apropiada a la mentalidad fuertemente práctica de los romanos, impregnando de sí misma la filosofía latina de la edad clásica, es decir, aquella que rige desde el siglo -I hasta los primeros siglos del imperio. La cultura latina privilegia los aspectos prácticos, por lo cual el estoicismo se consolida prevalentemente en los aspectos morales, es decir, en el plano ético; sin embargo, la difusión de la parte teórica fue muy poca, hecho del cual incluso hoy se evidencian las consecuencias: aún es poco conocida, fuera del estrecho círculo de los expertos. Para el estoicismo la Filosofía se articula en tres grandes campos: el de la *lógica*, el de la *física* (la acepción de este término, en griego, es muy diferente de la nuestra de hoy en día; esto porque *physis* significa ‘naturaleza’, podríamos interpretar ‘física’ como ciencia de la naturaleza en general) y el de la *ética*.

En relación con nuestro argumento, hay que tomar en consideración una teoría del significado, es decir, el así llamado ‘triángulo estoico’ o triángulo semántico. Los Estoicos, así como Aristóteles, se dan cuenta perfectamente que la relación lenguaje/mundo necesita como mínimo de otro elemento para explicar el concepto de ‘significado’. En otros términos, se debe partir de la constatación de que el significado, o *denotatum*, no es directamente la cosa del mundo. Por ejemplo, tomando un ejemplo clásico de la semántica estoica, podemos suponer la siguiente situación: cuando yo hablo con el bárbaro, que no entiende mi idioma, y le digo “Ves a Dione que camina”, el bárbaro no me entiende. Sin embargo, él percibe mis palabras, porque no es sordo; e igualmente, puede ver “la cosa” porque, no siendo ciego, ve a su vez a Dione que camina delante de nosotros. Pero, aún así él no me comprende. ¿Qué es lo que le falta? Para responder esta pregunta es necesario, en primer lugar, considerar el triángulo semántico. Tres son los elementos que entran en juego en una expresión lingüística y que constituyen, precisamente, el triángulo semántico: el *significante* (*semainon*), es decir, el aspecto fonético o la expresión (palabra, frase) pronunciada, el *significado* (*semainómenon*), es decir, el contenido asociado a la expresión y el *referente* (*tynchánon*), es decir, la cosa o realidad concreta a la cual la expresión hace referencia (objeto material o evento).

Los Estoicos nos advierten que, de los tres términos, dos son corpóreos, el significante y el referente, mientras que el otro, el significado, no lo es. El significado no es ni una afección del alma en el sentido aristotélico, ni una idea en el sentido platónico; no es pensamiento ni algo puramente psicológico (porque en este caso sería corpóreo),² así como no es una entidad invariante entre comunidades lingüísticas o entre culturas; en cuanto incorpóreo, el significado es un estado de cosas, una forma de ser o de ver las cosas, una unidad cultural (Eco, 1984). El significado (*semainómenon*) asume así la función de medio entre significante (*semainon*) y referente (*tynchánon*) y es condición ineliminable de la comunicación y de la comprensión.

Como evidencia Umberto Eco (1986), Sesto Empírico (II s.) en su *Adversus mathematicos* (*Contra los matemáticos*) identifica el *semainómenon* (significado) con el *lektón*, que es un *asómaton* (incorpóreo), pero la relación aparece, por el contrario, más articulada.

Traducir *lektón* en un idioma moderno es un asunto difícil; hay quienes lo identifican con un término técnico, otros afirman que *lektón* no era originariamente un término técnico porque indicaba la característica principal de las cosas (*pragmata*) de ser usada en los discursos y de significar los sonidos emitidos (Versteegh, 1977).

² En la física estoica, casi todo constituye una entidad material, incluso Dios, el alma y el pensamiento.

Séneca (-4 – 65), precisamente en referencia al ejemplo anterior, elegido no por caso, trata de traducirlo al latín con *dictum* o *effatum*. Si *lexis* es expresión, *lektón* es lo análogo en forma pasiva, lo expresado, lo denotado. Pero, entre los *lektá*, los Estoicos distinguen, más en particular, aquellos completos de aquellos incompletos. El *lektón* es llamado *completo* si transmite una información que pueda inequívocamente ser juzgada verdadera o falsa. El *lektón* es llamado, por el contrario, *incompleto* si expresa algo que debe ser integrado con alguna otra cosa para transmitir una información que pueda ser juzgada como verdadera o falsa. Por ejemplo, un predicado sin sujeto (“camina”) expresa un *lektón* incompleto, mientras una proposición (“Dione camina”) expresa un *lektón* completo. Los *lektá* incompletos son por tanto partes de una proposición (sujeto y predicado en nuestro ejemplo), entendidas no como entidades gramaticales sino como contenidos expresados o expresables, virtuales, es decir, considerados independientemente de sus relaciones con un determinado significante. Un *lektón* completo, en combinación con un significante, constituye una proposición que afirma algo plausible de ser juzgado verdadero o falso.

El bárbaro, por tanto, percibe tanto la voz emitida como el evento físico (un hombre, Dione, que camina), pero no reconoce la primera como expresión que reenvía a la segunda, es decir, como elemento portador de sentido, no conociendo la regla (o el código) que permite articular la voz emitida al evento físico (como el humo al fuego, en algún caso), por tanto cuanto expresado o expresable, es decir, el *lektón*; no siendo este último invariante respecto a las culturas.

Y es precisamente esto lo que le falta al bárbaro para la comprensión. El papel del *lektón* es fundamental, porque es precisamente así que se determina la relación funcional entre expresión y cosa, relación virtual, no directa sino, precisamente, mediada.

Volvamos ahora a nuestro problema, dentro de este ulterior panorama explicativo. El aprendiz percibe a través de los sentidos la voz emitida por el profesor, el objeto material o la cosa que el maestro exhibe (una representación de un objeto matemático, para el maestro). El proceso de conocimiento, para los Estoicos, tiene origen precisamente de aquí, de la percepción a través de los sentidos. Esta última, una vez que se adquiere consciencia, se convierte en *representación* (*phantasia*, una impresión en el alma). Una representación es como la impresión de un sello en la cera, es el objeto mismo a producirla en el aprendiz; durante su formación, el alma permanece pasiva y es a través de la representación que el objeto correspondiente se muestra al aprendiz. Después que el objeto fue removido, permanece en el aprendiz la memoria del objeto.

Un gran número de memorias de este tipo constituyen lo que los Estoicos llaman *experiencia* (*empeiria*). Los conceptos se forman en la fase sucesiva, a partir de las representaciones, y se forman espontáneamente (cuando representaciones similares se funden en nociones universales, sin una plena consciencia por parte del aprendiz) o conscientemente (a través de una actividad reflexiva que permita al aprendiz individuar semejanzas y analogías entre las representaciones, y combinarlas en conceptos o conocimientos). Según Cicerón (-106 – -43) (*Academica*, II, 47), Zenón comparaba la percepción a una mano abierta, el ascenso a una mano semi-cerrada, la comprensión (*katalêpsis*) a la mano completamente cerrada (el puño) y el conocimiento (*scientia*) al puño cerrado con fuerza por la otra mano. El conocimiento, según esta visión, es por tanto *katalêpsis* perfecta [para un estudio más profundo y general ver (Stöckl, 1887)].

El aprendiz recibe, por tanto, del maestro el signo material (lo que para el maestro constituye una representación del objeto matemático). De otra parte, una vez que esto es impreso en su mente, el mismo aprendiz debe encontrar, siempre en su mente, precisamente la representación de dicho objeto matemático que pueda ser puesta en correspondencia con aquel signo preciso que le fue ofrecido y, así, con el objeto matemático al cual el maestro intenta, desea, referirse.

Sólo la determinación del oportuno *lektón* podrá coronar con éxito el proceso de aprendizaje. En otras palabras, el fin, el *ubi consistam* del aprendizaje se alimenta, asume sustancia concreta, precisamente en el descubrimiento de la relación entre R(O) y O.

Sin duda alguna, la posición aquí descrita parece anticipar la frase de Duval que reportamos al inicio de este artículo.

3.4. Agustín de Hipona (354 – 430)

Agustín de Tagaste o de Hipona, según se elija la ciudad de su nacimiento o la ciudad de su muerte para completar su topónimo, es indudablemente un personaje emblemático de inicios del Medioevo. Muy bien conocido como teólogo, un poco menos como matemático aunque existen estudios sobre ello (Bagni, 2012; Carruccio, 1964; D'Amore e Matteuzzi, 1976), es un referente para los estudios sobre la semiótica (ver por ejemplo, D'Amore et al., 2013).

Él fue quien unificó dos teorías precedentes y en contraposición, aquella del lenguaje y aquella del signo. El signo es un dato sensorial:

Signum est enim res, praeter speciem quam ingerit sensibus, aliud aliquid ex se faciens in cogitationem venire; sicut vestigio viso, transisse animal cuius vestigium est, cogitamus; et fumo viso, ignem subesse cognoscimus; et voce animantis audita, affectionem animi eius advertimus, et tuba sonante milites vel progredi se vel regredi, et si quid aliud pugna postulat, oportere noverunt.³ (Agustín, *De doctrina cristiana*, II, 1.1)

Pero eso, para la mente de quien lo percibe, indica siempre alguna cosa. Existen por tanto un vehículo del signo (algo) y un referente (otro algo); el intérprete, a veces no mencionado, es presupuesto en todo modelo de signo; no constituye por tanto un ulterior, tercer elemento de la relación entre signos, en la tradición que distingue sistemáticamente sentido y referente, como lo plantearon en su hipótesis los Estoicos (Nöth, 1995).

Agustín proporciona una definición de signo: “Dicimus enim et signa universaliter omnia quae significant aliquid, ubi etiam verba esse invenimus”⁴ (Agustín, *De Magistro*, I, 4.9).

La inclusión de las palabras dentro de los signos es una novedad y es necesario buscar otra definición en otro texto: “(Verbum est) uniuscuiusque rei signum, quod ab audiente possit intellegi, a loquente prolatum” [(Palabra es) un signo de algo que puede ser comprendido por quien escucha cuando es pronunciado por quien habla] (Agustín, *De dialéctica*, cap. V).

En este mismo texto, Agustín distingue cuatro componentes de la palabra: (1) el *verbum*, la palabra dicha, el significante; (2) la *dictio*, es decir, la palabra dicha por alguien para significar algo, por tanto una combinación de significante y significado; (3) el *dicibile*, lo que de la palabra se entiende y es contenido en la mente; (4) la *res (cosa)*, a lo que refiere la palabra a través de los sentidos o del intelecto, o que no es accesible a los sentidos.

Para Agustín, no se pasa del signo al significado, sino de un signo a otro signo, dado que un signo no puede, por su naturaleza, hacer evidente un significado. Aún más, esto vale en la relación entre signo S y objeto O: es necesario conocer el objeto O para poder reconocer que aquel determinado signo S es signo de un determinado objeto S(O). El conocimiento de O permite reconocer S como S(O), pero S, por sí sólo, sin el previo conocimiento de O, no permite entender que S es signo de O.

³ Traducción libre: Un signo es algo que, más allá de su aspecto sensible, trae a la mente algo diferente de sí, como la huella que deja un animal, el humo del cual se infiere la presencia del fuego, el lamento que indica dolor, o la trompeta que comunica órdenes a los soldados.

⁴ Traducción libre: Se definen genéricamente signos todas las cosas que significan algo, y entre estos se encuentran también las palabras.

Esto trae como consecuencia una jerarquía de importancia en el aprendizaje: primero se aprenden las cosas y sólo después los signos de las cosas.

Cum enim mihi signum datur, si nescientem me invenit cuius rei signum sit, docere me nihil potest: si vero scientem, quid disco per signum?⁵ (Agustín, *De Magistro*, 10, 115)

El signo puede indicarnos dónde debemos dirigirnos para poder ver (función deíctica o ostensiva) y, por tanto, para aprender (función cognitiva), o puede tener una función evocativa, es decir, traer a la mente un concepto, un significado, o una imagen (Agustín, *De Magistro*, 10, 168); esto tiene entonces en origen como primaria una función ostensiva. El signo es por tanto utilizado en función del objeto.

Reportamos en seguida un apartado de la obra *De Magistro* que contiene la cita precedentemente hecha en su contexto más general.

10.33. Pero si lo consideras con más detención, no hallarás tal vez nada que se aprenda por sus signos. Cuando alguno me muestra un signo, si ignoro lo que significa, no me puede enseñar nada; pero si lo sé, ¿qué es lo que aprendo por el signo? La palabra no me muestra lo que significa cuando leo: Y sus *sarabarae* (cofias) no fueron deterioradas. Porque si este nombre (*sarabarae*) representa ciertos adornos de la cabeza, ¿acaso, al oírlo, he aprendido qué es cabeza o qué es adorno? Yo los había conocidos antes, y no tuve conocimiento de ellos al ser nombrados por otros, sino al ser vistos por mí. En efecto, la primera vez que estas dos sílabas *caput* (cabeza) hirieron mis oídos, ignoré tanto lo que significaban como al oír o leer por primera vez el nombre “sarabarae”. Mas al decir muchas veces cabeza, notando y advirtiendo cuándo se decía, descubrí que éste era el nombre de una cosa que la vista me había hecho conocer perfectamente. Antes de este descubrimiento, la tal palabra era para mí solamente un sonido; supe que era un signo cuando descubrí de qué cosa era signo; esto, como he dicho, no lo había aprendido significándoseme, sino viéndola yo. Así pues, mejor se aprende el signo una vez conocida la cosa que al revés.

10.34. Para que más claramente entiendas esto, suponte que nosotros oímos ahora por vez primera la palabra “cabeza”, y que, ignorando si esta voz es solamente un sonido o si también significa algo, preguntamos qué es una cabeza (recuerda que no queremos conocer la cosa significada, sino su signo,

⁵ Traducción libre: Cuando, de hecho, me han dado un signo, si me encuentro en que no tengo conocimiento de la cosa de la cual es signo, no puede enseñarme nada; pero, si ya lo conozco, entonces ¿qué estoy aprendiendo mediante el signo?

y no tenemos su conocimiento mientras ignoramos de qué es signo). Ahora bien, si a nuestra pregunta se responde señalando la cosa con el dedo, una vez vista aprendemos el signo que habíamos oído solamente, pero que no habíamos conocido. Ahora bien, como en este signo hay dos cosas, el sonido y la significación, no percibimos el sonido por medio del signo, sino por el oído herido por él; y percibimos la significación después de ver la cosa significada. Porque la acción de señalar con el dedo no puede significar otra cosa que aquello a que el dedo apunta; y apunta no al signo, sino al miembro que se llama cabeza. Por lo tanto, no puedo yo conocer por la acción del dedo la cosa que conocía, ni el signo, al cual no apunta el dedo. Pero no me cuido mucho de la dirección del dedo porque más bien me parece signo de la demostración que de las cosas que se demuestran, como sucede con el adverbio “he aquí”; pues con este adverbio solemos extender el dedo, no sea que un signo no vaya a ser bastante. Y principalmente me esfuerzo en persuadirte – si soy capaz – de que no aprendemos nada por medio de los signos que se llaman “palabra”. Como ya he dicho, no es el signo el que nos hace conocer la cosa, antes bien, el conocimiento de ella nos enseña el valor de la palabra, es decir, el significado que entraña el sonido.

(Traducción tomada de: es.scribd.com/doc/59573973/San-Agustín-De-Magister-El-Maestro)

Consideramos que Agustín constituye un precedente ilustre, más aún, un explícito precedente para nuestra ‘paradoja cognitiva’, sobre el cual debemos obligatoriamente reflexionar.

La teoría de Agustín resulta comparable con la constatación de Duval: el signo no es en sí portador de un objeto, y no puede por tanto sostener algún evento transactivo. Yo en cuanto maestro, puedo al máximo alcanzar al estudiante el signo o, para decirlo utilizando las palabras de Duval, puedo ofrecerle la representación semiótica del objeto; pero no puedo consignarle el objeto.

Agustín desarrolla esta tesis en función platónica, en apoyo de la teoría del anamnesis; Duval, menos estrechamente adherente a la tesis platónica, sostiene sin embargo, igualmente, que sólo quien ha ya construido el objeto, o de cualquier forma está en grado de construirlo dentro de sí, está en grado de decodificar el signo recibido, en cuanto que capta aquel al cual el signo mismo alude.

Con el signo de raíz cuadrada yo no enseño nada a quien no sepa comprender qué es la raíz cuadrada. El signo de por sí es un objeto concreto, o un acontecimiento físico que está en el mundo, una mancha de tinta sobre un papel, o una onda acústica en el espacio: si nos limitamos a esta evidencia física, no hay diferencia alguna con cualquier otro objeto. La noción de convertirse plenamente en *signo* se da en el momento en el cual se reconoce lo que representa, en su aludir

a otro, diferente de sí. Pero si el receptor no posee el elemento de destinación, el *quid* al cual el signo se dirige, entonces él no tendrá a disposición realmente un signo, sino una presencia física que se evidencia en una cosa, simple contenido perceptivo; y no podrá obtener de esto ningún incremento de conocimiento. En este sentido, la teoría agustiniana nos manifiesta como uno de los antecedentes que mejor se puede comparar con la paradoja cognitiva de Duval.

3.5. *Gottfried Wilhelm Leibniz* (1646 – 1716)

De la gran producción de Gottfried Wilhelm Leibniz, cuyo legado se compone de más de 150.000 páginas, consideraremos aquí un ensayo, dedicado completamente al problema semántico. Se trata de *Dialogus*, editado por primera vez por Erdmann en 1840.⁶ Leibniz imagina un diálogo entre dos personajes, a quienes llama simplemente A y B, el primero de los cuales representa el papel de guía y expresa las ideas del mismo Leibniz. Inicia con la consideración de una verdad geométrica simple. A pide entonces a B: *Hocce verum esse putas, etiamsi a te non cogitetur* (¿Consideras que esto sea verdadero aunque no sea pensado por ti?). Y B responde: *Imo, antequam vel Geometrae id demonstrassent, vel homines observassent* (Pero ciertamente, esto era verdadero aún antes de que los geómetras lo demostrasen, o los hombres lo hubiesen observado).

Este es un importante aspecto. Aquí se asume que las verdades matemáticas son *ab aeterno*, y no dependen de la producción humana. Podríamos definir esta posición como realista, o también platónica, en antítesis con las posiciones *constructivistas*, es decir de aquellos que consideran, por el contrario, que el objeto matemático es producto de la mente del matemático [pensemos, por ejemplo, al intuicionismo de Luitzen Brouwer (1881 – 1966) o de Arend Heyting (1898 – 1980)].⁷ La cuestión de la existencia en Matemática, que no podemos ciertamente afrontar aquí, es, sin embargo, un presupuesto que debemos tener presente para entender nuestra paradoja cognitiva.

Adherir a la primera o a la segunda hipótesis tiene consecuencias de gran relevancia: una cosa es suponer que O, el objeto matemático, existe en sí mismo; otra cosa diferente es suponer que O deba ser *construido*.

⁶ Erdmann lo titula: *Dialogus de connexione inter res et verba, et veritatis realitate*, mientras que el mismo Leibniz lo había titulado simplemente: *Dialogus*. Leibniz nos proporciona también una fecha exacta, escribiendo debajo del título: “August, 1677”

⁷ Actualmente, después del segundo Wittgenstein, se tiende a distinguir entre posiciones realistas, precisamente, y pragmatistas (D’Amore, 2001; D’Amore e Fandiño Pinilla, 2001; y otros).

Forzamos un poco las cosas buscando un ejemplo dentro de una situación de aprendizaje; aspecto que, en realidad, no se cita en ningún momento en Leibniz. Lo hacemos sólo para articular el pensamiento de Leibniz con nuestro objetivo de encontrar precedentes a la paradoja de Duval. No está dicho que, empezando con el tener en cuenta $R(O)$, que es todo lo que recibe, el alumno esté siempre en grado de construir cognitivamente dicho objeto O cuya existencia cognitiva, por tanto, no es de hecho garantizada (Duval, 1993).

Leibniz prosigue intimidando cada vez más a su interlocutor que, considerando verdadero incluso lo que no ha sido pensado, es llevado a colocar la verdad, y por tanto el significado, *en las cosas*. De aquí se desprende la contradicción por la cual deberían existir cosas falsas, puesto que no todo aquello que decimos es verdadero. Esta es la clásica *aporía* en la cual se cae al reducir el significado a la cosa. Leibniz se gana de aquí la atribución de la verdad a las proposiciones en cuanto posibles, así que, según como se piense de una o de otra forma, su pensamiento será falso o verdadero:

Vides ergo veritatem esse propositionum seu cogitationum, sed possibile, ita ut saltem certum sit, si quis hoc aut contrario modo cogitet, cogitationem eius veram aut falsam fore.⁸ (Leibniz, 1840, p. 76)

El paso sucesivo es la confrontación del nominalismo o, de cualquier forma, de las teorías convencionalistas del lenguaje: el criterio de verdad se funda en lo real.

Contra la famosa objeción anónima, que Leibniz imagina fue avanzada por Thomas Hobbes (1588 – 1679), que el lenguaje está basado en convenciones, y que la elección de las palabras es arbitraria, Leibniz se la jugó bien al notar que, no obstante la diferencia de los signos usados, “es idéntica la geometría de los griegos, de los latinos y de los alemanes”. Debemos notar que los pensamientos pueden producirse sin vocablos, pero no sin otros signos. Leibniz desafía su interlocutor: “Tenta quaeso an ullum Arithmeticum calculum instituere possis sine signis numeralibus”^{9, 10}.

⁸ Traducción libre: Así, la verdad es una propiedad de las proposiciones o de los pensamientos pero en cuanto estos son posibles; entonces, por lo menos esto es cierto, que, si alguien piensa de una o de otra forma, su pensamiento resultará falso o verdadero.

⁹ Traducción libre: Prueba, si lo logras, ¡a hacer un cálculo aritmético sin signos numerales!

¹⁰ En el margen de la hoja, Leibniz anota la célebre frase que el lógico francés Louis Couturat (1868 – 1914) elegirá como mote: “Cum Deus calculat [...] fit mundus” (Cuando Dios calcula se hace el mundo).

La tesis final a la cual Leibniz llega es que el signo (o *carácter*), aunque no debe “semejar” a la cosa, presenta, con respecto a la cosa, a lo real, o respecto al concepto que este designa, un isomorfismo estructural (una iconicidad diagramática, en términos de Peirce) que no depende de las convenciones o de la elección de los signos. Así, los matemáticos pueden llegar a resultados invariantes, aún usando sistemas posicionales diversos, por ejemplo, en base decimal o en base duodecimal; “a menos que los enunciados tengan que ver con los mismos caracteres”. Y el ensayo termina precisamente con un ejemplo matemático. Consideremos a^2 . Podemos asumir que a sea igual a $b+c$, y entonces tenemos que a^2 es equivalente a b^2+c^2+2bc , o que a sea igual a $d-e$, y entonces tendremos que el cuadrado de a es d^2+e^2-2de . Es fácil para Leibniz mostrar, con algunas igualdades, cómo el objeto matemático, aún representado con signos diferentes, es en definitiva el mismo.

Según Leibniz esta es, por tanto, la vía para salir de la paradoja: reconocer la invariancia de las propiedades del objeto matemático respecto a la arbitrariedad de los signos utilizados, que también se encuentran en los estudios de Duval (1995, 1998a, 1998b, 2009a). Entonces, el punto es pasar de la representación semiótica privada, personal, que se coloca según Leibniz en la mente del sujeto, a una representación “objetiva” o, por lo menos, “inter-subjetiva”. Este pasaje será explicitado mejor por Frege, como veremos a continuación, y forma parte de las conquistas didácticas actuales, no sólo en el campo investigativo (D’Amore et al., 2013).

3.6. *Gottlob Frege* (1848 – 1925)

De la vasta producción de Gottlob Frege conviene hacer énfasis en el ensayo *Über Sinn und Bedeutung*, que podríamos traducir como *Sobre Sentido y Referencia*, aunque no faltan alternativas.¹¹ Se trata del escrito que probablemente ha influenciado fuertemente en las teorías modernas y contemporáneas del significado. En Frege (1892), el significado de un concepto se establece usando los términos: signo, sentido y referencia. Por lo tanto, si dos términos distintos denotan un mismo objeto, esto no implica que tengan el mismo significado, ya que este

¹¹ La traducción al español es *Sobre Sentido y Referencia*, términos comunes en los trabajos de filosofía en castellano de esta obra (por ejemplo, véase: editor Jesús Mosterín, Editorial Crítica Grijalbo Mondadori, Barcelona, 1996). Sin embargo, fue el mismo Frege a pronunciarse por la solución *Sentido y significado*, en una letra personal (una de las tantas) a Giuseppe Peano (1858 – 1932); lo cual consideramos cierra la cuestión.

también consiste en el modo de denotar y en el uso de denotación. La distinción fundamental sobre la cual Frege basa sus argumentos es aquella entre ‘sentido’ y ‘referencia’, precisamente, es decir, entre *intensión* y *extensión*, o *connotación* y *denotación*, distinción conocida desde los inicios; por ejemplo, ciertamente ya Aristóteles la conocía, pero nunca estuvo analizada de forma sistemática, con la excepción de varios escritos de Leibniz, pero que quedaron inéditos.

Tomemos el término “triángulo” (en el sentido común de uso en Geometría, palabra en la cual se evidencia la presencia de tres ángulos) y el término “trilátero” (una línea poligonal cerrada de tres lados, palabra en la cual se evidencia la presencia de tres lados). Dado que un triángulo debe ser necesariamente trilátero, y viceversa, decimos en acuerdo con Frege que los dos términos denotan el mismo objeto pero tienen *sentidos* diferentes. Se podría caer en la tentación de rendir un tributo a la navaja de Occam, y eliminar el sentido: en fondo, por lo que respecta a la Matemática, lo que nos interesa parece ser, en primer lugar, el significado (el conjunto de signo, sentido, referencia). Y, de hecho, gran parte de las teorías formales basan su semántica en la extensión, y renuncian, o tratan de renunciar, a la intensión.

Sin embargo, las cosas no son tan simples como parece. El concepto de identidad canonizado por Leibniz se basa en la mutua ‘sustituibilidad’ en todos los contextos: “Eadem sunt quae mutui substitui possunt salva veritate”¹² (Leibniz, *Die Philosophische Schriften*. VII, p. 219) (véase Bagni, 2006). Por tanto, si demostré que $A = B$, puedo reemplazar el primero (A) con el segundo (B), sin modificar el valor de verdad del enunciado.

Pero volvamos a nuestro ejemplo: habiendo acordado que ‘triángulo’ y ‘trilátero’ son el mismo objeto, podemos concluir que todo predicado que vale para el primero vale también para el segundo, y viceversa. Sin embargo, consideramos el enunciado siguiente:

- 1) Con un simple razonamiento podemos convencernos de que todo triángulo es un trilátero.

Ahora, sobre la base del principio expuesto líneas arriba, sustituimos ‘trilátero’ con ‘triángulo’ en 1). Tendremos:

- 2) Con un simple razonamiento podemos convencernos de que todo triángulo es un triángulo.

¹² Traducción libre: Son iguales los que se pueden substituir mutuamente.

Mientras que 1) nos parece un enunciado matemáticamente sensato, y además simple, 2) no nos comunica ninguna verdad geométrica.

Por tanto, atención: la identidad del *denotatum* de dos términos no permite su sustituibilidad real en *todos* los contextos, sólo en aquellos puramente extensionales, en una acepción que puede ser definida rigurosamente.

El discurso nos podría llevar lejos. Pero nuestra intención es, por el contrario, volver a nuestra paradoja cognitiva; y hacernos la pregunta: cuando el maestro propone una expresión lingüística, ¿qué es lo que recibe el estudiante, el simple sentido o el significado, de lo que Duval llama ‘representación semiótica’? O, mejor aún, ¿parcialmente los dos? Es sensato pensar que, cada vez, se pueden presentar todos los casos posibles.

Veamos un ejemplo. Quiero enseñar un teorema de geometría plana. Pido al estudiante considerar el triángulo ABC y hacer una figura que lo represente. ¿Qué estoy comunicando? De aquí se entiende que prevalece el *Sinn*, el sentido: el estudiante reconoce la característica intrínseca que califica el objeto, que en nuestro caso es la de tener tres ángulos, característica que es suficiente para determinar la pertenencia del objeto a una precisa clase y no a otra. Después le pido prolongar la base BC. Inmediatamente su atención recae en el objeto, cuyo icono está bajo su mirada: aquí prevalece el *Bedeutung*, la referencia, el *denotatum*. Las propiedades del objeto, la de ser un segmento, el poder ser pensado como un conjunto de puntos más que numerable, el hecho de considerar sólo lo largo sin el ancho, etcétera, pasan a un segundo plano. No es que el objeto no tenga estas propiedades, ni que el estudiante las ignore: simplemente, salen del campo de la representación semiótica. Estas serán recuperadas, tal vez, a continuación, cuando se pide continuar la demostración o en sucesivas ocasiones.

Haciendo un salto en el tiempo de varios siglos, de otro lado, precisamente los estudios pioneros de Duval han permitido distinguir en cada representación semiótica $R_i(O)$, de un objeto matemático O , las características de O que $R_i(O)$ logra representar a diferencia de otras $R_j(O)$, $i \neq j$ (D’Amore, 2000).

3.7. Edmund Husserl (1859 – 1938)

La solución semántica propuesta por Edmund Husserl, en particular en *Prolegómenos* (Husserl, 1900) y en la *Primera investigación lógica, Expresión y significación* (Husserl, 1901), resulta la más articulada y sofisticada de todas las que hasta ahora hemos visto.

“Todo signo es signo de algo, pero no todo signo tiene un ‘significado’, un ‘sentido’ que el signo expresa” (Husserl, 1970). Inicia así su análisis del lenguaje, de

la afirmación que algunos signos, además de indicar algo, expresan un significado (tales son, en particular, todas las expresiones lingüísticas), mientras otros signos (notas, marcas, etc.) indican algo sin expresar significado. Los primeros los llama *expresiones*, mientras los segundos *índices* (o *indicaciones*).

Un signo de tipo ‘expresión’ está, por tanto, asociado a un modelo triádico: *expresión* (el vehículo del signo), *significado* (el sentido) y *cosa* (el referente). Un signo de tipo ‘índice’ es, por el contrario, asociado a un modelo diádico: *índice* (el vehículo del signo) y *cosa* (el referente).

Así, mientras una expresión tiene un significado e indica algo a través de su significado, un índice indica algo sin tener de por sí un significado. La relación con el referente, en este último caso, es directa y de tipo psicológico, en el sentido que la convicción de la existencia de una cosa motiva la convicción de otra; la relación entre una expresión y su referente, por el contrario, está mediada por el significado y no es una cuestión de convicción (para mayores detalles véase Mensch, 2001).

En el caso de la expresión, Husserl distingue en particular tres ingredientes de la significación (Nöth, 1995): (1) un “acto de conferir significado” o “intención significante”, por parte del productor de la expresión, a la cual corresponde un “acto de llenado de significado” por parte del intérprete; (2) el *contenido* o significado de estos actos; (3) el *objeto* significado de la expresión. El significado es en todo caso una entidad ideal, fuera de la mente humana, pero asociada a la consciencia humana a través del acto intencional de significación. Solamente el acto intencional de la conciencia confiere significado al signo (Nöth, 1995). Por tanto, mientras la expresión presupone siempre un acto intencional de significación, el índice no; sin embargo, en el caso del índice, “nosotros generalmente sentimos la conexión” del vehículo del signo con el objeto simultáneamente presente (Husserl, 1970).

Es posible que en esto Husserl sienta la influencia de sus estudios matemáticos. Husserl estudió bajo la dirección de Carl Weierstrass (1815 – 1897), junto con, notamos de paso, Georg Cantor (1845 – 1918) nada menos (y conoció muy bien la obra del amigo y colega sobre la teoría de los conjuntos trans-finitos).

Si yo escribo a_i y a_j , ¿qué función expresiva tienen i y j ? Por un lado, estos no nos dicen nada de las a_j a la cuales hacen referencia, sin embargo, tienen carácter de individuación. En primer lugar, nos dicen que el segundo objeto es distinto del primero. Pero también, si a continuación volvemos a usar a_j , se entiende que no es un a cualquiera con la condición de que sea diferente de a_i , pero también que es la misma a_j de antes. La conclusión es, por tanto, que la referencia al objeto existe, es decir, estamos frente a una denotación (D’Amore y Fandiño Pinilla, 2012). Por otro lado, el carácter descriptivo es nulo: Frege diría que falta

el *Sinn*. El proceso expresivo parte de la *Intencionalidad*, del hacer referencia intencional a un objeto por parte de quien habla. Este es uno de los fundamentos de la fenomenología husserliana: el pensamiento es *direccional*, puede *centrarse* en el objeto que desee. A este punto lo puede indicar o expresar o las dos cosas. De esta forma cumple un ‘acto signifiante’. Aquí es relevante que, además del contenido lingüístico en sí, se proporciona una ulterior información, que consiste en la intención de comunicar.

La originalidad del enfoque de Husserl respecto a todas las situaciones precedentes será reconocida particularmente por Karl Bühler (1879 – 1963) con la llamada *Kundgabe Theorie der Sprache*, o teoría del completamiento: simplificando los pasajes, podríamos sintéticamente decir que el escuchante, o receptor, frente al acto signifiante, busca en sí mismo un posible ‘contenido llenante’, es decir, una representación que pueda colmar la forma que se dio en el acto comunicativo en sí. De hecho, aquí tenemos una visión semántica que no se limita a ponerse de parte de quien habla, o a postular una improbable simetría entre los dos actores, sino que se coloca también en el polo opuesto del receptor, es decir, en nuestro caso, del estudiante. ¿Y ‘dónde’ busca el receptor? En su *Erlebnis*, es decir, en sus vivencias, en su experiencia, en su cognitivo, que no está dicho que contemple aún el objeto tema del discurso del emisor. El modelo se complica, como decíamos, pero, precisamente es por este hecho que ofrece una explicación más profunda.

De nuevo, tornando a nuestra paradoja, se encuentra en forma mucho más articulada el mismo proceso agustiniano: “Noli foras ire, in te ipsum rede”¹³ (Agustín, *De vera religione*, XXXIX, 72). Recibido el acto lingüístico, es decir, la representación semiótica, es dentro de mi *Erlebnis*, o en la combinación de componentes que extraigo de esta, que puedo construir el objeto, es decir, reconocer el “rellenado” adecuado para que el sentido¹⁴ sea conferido, y el proceso alcance el éxito.

3.8. Ludwig Wittgenstein (1889 – 1951)

En el ámbito de la Filosofía del lenguaje del siglo pasado, sin duda Wittgenstein representa un punto de imprescindible discontinuidad. Imprescindible, porque cada una de las sucesivas tomas de posición sobre el problema semántico, y por tanto,

¹³ Traducción libre: No andar fuera, entra en ti mismo.

¹⁴ Usamos aquí ‘sentido’ en la acepción de Husserl, la cual es diversa de la acepción que proporciona Frege.

en cierta medida, sobre el argumento que nos interesa, nos lleva inevitablemente a Wittgenstein; pero, de otra parte, punto de discontinuidad porque el autor en cuestión no se deja enmarcar en ninguna corriente de pensamiento canónica.

Al aumentar la complejidad, que a esta altura es un hecho historiográficamente establecido, desde el punto de vista, de la Filosofía, que existe una brecha muy sensible entre un primero y un segundo Wittgenstein o, como se dice, entre el Wittgenstein del *Tractatus* y el Wittgenstein de las *Investigaciones filosóficas*. Y, aún, coexisten tanto sobre el primero como sobre el segundo, interpretaciones muy diferentes. Sin embargo, no pretendemos presentar o comentar su obra en pocas páginas, sino mostrar cómo ciertas posiciones de Wittgenstein puedan ser interpretadas en la dirección que caracteriza nuestro trabajo.

Es bien conocido que las *Investigaciones filosóficas* de Ludwig Wittgenstein inician con la refutación de una propuesta que Agustín hace en las *Confesiones* a propósito de cómo un niño aprende el lenguaje. Wittgenstein acepta la idea agustiniana según la cual, al inicio, las primeras aproximaciones al lenguaje objeto de aprendizaje son de tipo ostensivo (de parte del adulto que enseña) – imitativo (de parte del niño que aprende), basando los primeros éxitos parciales del niño en una imagen de lenguaje que Agustín intenta proponer, haciendo presión en las palabras que el adulto usa en sentido ostensivo.

En estas palabras encontramos, así lo considero, una determinada imagen de la naturaleza del lenguaje humano. Y precisamente esta: las palabras del lenguaje denominan objetos – las proposiciones son conexiones de dichas denominaciones. – En esta imagen del lenguaje encontramos la raíz de la idea: toda palabra tiene un significado. Este significado es asociado a la palabra. Es el objeto por el cual la palabra está. (PI, I, párr. 1)¹⁵

Por tanto, Wittgenstein evidencia y arroja luz a dos puntos en la tesis de Agustín, haciéndola propia por ahora y rediscutiéndola con palabras propias: las palabras denominan objetos; las proposiciones son conexiones de dichas denominaciones.

Por tanto, las palabras son entonces por ahora nombres que indican objetos concretos; las proposiciones sirven para mostrar relaciones entre cosas, por tanto entre nombres (y es lógicamente posible, sobre la base de la referencia a los “hechos” reales, inferir cuáles proposiciones son verdaderas y cuáles son falsas).¹⁶

¹⁵ PI = *Philosophical Investigations* (Wittgenstein, 1953), parte I, seguida del número de párrafo; Parte II, seguida del número de página.

¹⁶ La tentación de decir algo más en esta dirección, citando el Wittgenstein del *Tractatus* (1921/1922) es muy fuerte, pero nos llevaría demasiado lejos.

El niño pareciera que aprende a causa de la ostensión hecha por el adulto, asociando un nombre a una cosa concreta, por imitación, repitiendo el sonido de la voz que escuchó.

Aquí inicia la crítica a la posición de Agustín:

De una diferencia entre tipos de palabras Agustín no habla. Quien describe de esta forma el aprendizaje del lenguaje piensa, creo, básicamente a sustantivos como “mesa”, “silla”, “pan”, y a nombres de persona, y sólo en un segundo momento a los nombres de ciertas actividades y propiedades; y piensa a los restantes tipos de palabras como algo que se ajustarán por sí mismo. (PI, I, párr. 1)

Para Agustín, la esencia del lenguaje está en la nominalización inicial referida a objetos concretos, el resto vendrá por sí mismo espontáneamente (Spinicci, 2002), tesis que Wittgenstein considera, explícitamente, demasiado apresurada.

A este punto, Wittgenstein proporciona algunos ejemplos muy bien conocidos con los cuales quiere mostrar que el lenguaje es algo más (el famoso ejemplo de “mando uno a hacer el mercado”, puro experimento mental, en el cual Wittgenstein muestra que el lenguaje es en gran medida comunicativo y que la reacción a cada una de las palabras contenidas en un mensaje provoca reacciones diversas por parte de quien las propone y quien las recibe, interpretándolas: “manzanas”, “rojas”, “cinco”).

Para Agustín, por tanto, el lenguaje es hecho de nombres, cada uno de los cuales ilustra una realidad, mejor aún, cada objeto de dicha realidad; pero esta tesis no se sostiene en el momento de pruebas empíricas de la experiencia o en el uso concreto de los signos (orales, escritos), dado que es la pareja “palabra – uso de dicha palabra en un cierto contexto” lo que determina el significado (que no es el significado banal ostensivo de denominación).

Para Wittgenstein el lenguaje es parte de un actuar y puede ser entendido sólo si se acoge en su valencia instrumental. Gracias al lenguaje hacemos muchas cosas diferentes y esta diversidad caracteriza también las formas lingüísticas, incluso si permanece encubierta por debajo de la relativa igualdad exterior de las palabras. (Spinicci, 2002, p. 13)

Wittgenstein prosigue con otros ejemplos – experimentos mentales (que ciertos autores criticaron después lo que desea llegar a evidenciar es que el “sentido” de las palabras de un lenguaje se define, es individuado, es compartido no sólo por el nombre en sí, sino también por el uso que se hace.

“El significado de una palabra está en el uso que se hace de ésta en el lenguaje” (PI, I, párr. 43).

“El significado de una palabra es el papel que dicha palabra juega en el cálculo del lenguaje” (PG, p. 67).¹⁷

Pero en todo esto es importante no confundir “el portador de un nombre con el significado del nombre” (PI, I, párr. 40; PG, pp. 63–64). En las palabras de Duval: una representación con lo que representa, un signo con lo que el signo reenvía.

En el ámbito de esta aparente teoría del aprendizaje del lenguaje por parte de un niño, es necesario hacer referencia a la idea de “juego lingüístico” (PI, I, párr. 7; Wittgenstein, 1958, pero recordemos que este 1958 significa 1933-1934).

Algunos de los estudiosos que hacen referencia a esta noción la banalizan y otros la sobreestiman, según nuestra opinión. Un “juego lingüístico” no es otra cosa que una modalidad de uso de los signos que sea la más banal, elemental y primitiva posible, ejemplificable en la de los niños que están iniciando a hacer uso de un lenguaje basado en la pareja de modalidades ostensiva-imitativa de la cual se ha hablado.

En otras palabras, incluso el signo más simple (como un nombre) es un signo (un nombre) sólo en un juego lingüístico; el significado de un signo es precisamente el papel que ese tiene en un tal juego (PI, I, párr. 49, párr. 261; PG, p. 130). Y aquí Wittgenstein cita a Frege: “Esto es también lo que Frege quiso decir cuando dice que la palabra tiene significado sólo como parte de una frase” (PI, I, párr. 49).

Wittgenstein (1958, p. 5) afirma además que comprender una frase significa comprender un lenguaje, el sistema de signos al cual pertenece el lenguaje. En particular, comprendemos una frase cuando somos capaces de sustituirla con otra frase que expresa la misma cosa en el mismo lenguaje o en un lenguaje diferente; o cuando podemos traducir una palabra en un gesto o un gesto en una palabra (PG, pp. 40–42).

Esto nos lleva inevitablemente a Duval (quien cita tanto a Frege como a de Saussure): una representación semiótica de un objeto matemático se produce siempre al interior de un registro de representación, y no es concebible fuera de este, así como un signo funciona como signo sólo al interior de un sistema semiótico, en oposición a otros signos, independientemente de cualquier referencia al objeto. La comprensión, es decir, la construcción cognitiva de un objeto matemático, es inseparable de la producción o elección de representaciones semióticas adecuadas y

¹⁷ PG = *Philosophische Grammatik* (Wittgenstein, 1913).

de sus transformaciones mediante tratamientos o conversiones, por tanto es inseparable del reconocimiento de la correspondencia entre representaciones diferentes de un mismo objeto en el mismo registro o en registros diferentes.

En un juego lingüístico, como dice el mismo Wittgenstein, se trata de reflexionar sobre una forma de lenguaje primitivo; cuando nos preocupamos de la verdad y la falsedad de las proposiciones, de la concordancia de éstas con la realidad que nos circunda, es importante hacerlo en este tipo de situaciones, antes de que aparezcan complicados procesos de pensamiento que modifican el escenario en el cual estas proposiciones toman sentido, antes que aparezcan las nieblas mentales que oscurecen el uso del lenguaje; las formas complicadas de lenguaje se construirán después precisamente a partir de aquellas formas primitivas (Wittgenstein, 1958, p. 17).

En cierto sentido la semejanza salta a la vista: aquí, de hecho, el concepto de juego lingüístico se introduce explícitamente como una forma que permite reconocer en la simplicidad de una estructura poco articulada el juego de las acciones y reacciones de las cuales consta el lenguaje.

Ahora, esta simplicidad ha sido siempre reconectada con el problema del aprendizaje: cualquiera que sea la forma empírica en la cual el aprendizaje se realiza, es de todas formas razonable sostener que el niño aprende a hablar moviendo precisamente de los “juegos lingüísticos”, es decir, de situaciones en las cuales es fácil identificar actividades y reacciones y, junto a estas, las reglas que las sostienen. (...)

El reenvió a la idea de juego no está determinada únicamente por la relativa simplicidad de los ejemplos propuestos en contra de la complejidad del lenguaje cotidiano, sino también por la evidencia con la cual se muestran las reglas en los juegos. En esta perspectiva, el juego es en verdad ejemplar: los juegos constan siempre de reglas que debemos seguir, que deben ser aprehendidas y que en ocasiones deben ser rememoradas explícitamente durante las fases más sugestivas del juego. (Spinicci, 2002, p. 39)

Y aquí Wittgenstein se aproxima a consideraciones sobre juegos específicos que creemos poder interpretar en la dirección que estamos persiguiendo y que resumimos así: sería necesario conocer las reglas para poder jugar, es decir, para poder aprender sería necesario que alguien se las explicara al discente; una vez conocidas las reglas del juego, se juega, en otras palabras, se aprende; pero si ninguno explica las reglas, se corre el riesgo de jugar a un juego con reglas diversas, por tanto de aprender cosas diferentes de aquellas que se auspician.

¿Cómo adviene el aprendizaje, si no por ostensión e imitación, siguiendo reglas la mayor parte de las veces no declaradas de un juego? Aquí, Wittgenstein

comienza a examinar en profundidad el sentido de las “definiciones ostensivas” que para él están en la base, pero que no regulan y que no son suficientes para regular el aprendizaje (PI, I, párr. 28–32).

La definición del número dos: Esto se llama ‘dos’ – y así diciendo se indican dos nueces – es perfectamente exacta. – ¿Pero cómo es posible definir el dos de esta forma? A quien se le da la definición no sabe qué se quiere denominar con ‘dos’; supondrá que ¡tú denominas *este* grupo de nueces! – Puede suponerlo, pero tal vez no lo supone. Por el contrario, si queremos atribuir un nombre a este grupo de nueces, el otro podría pensarlo como un numeral. Y, de la misma, manera, a quien yo le doy una definición ostensiva del nombre de una persona podría interpretarlo como el nombre de un color, como la designación de una raza incluso con el nombre de un punto cardinal. Esto quiere decir que la definición ostensiva puede en *cualquier* caso ser interpretada en esta o en otras formas posibles. (PI, párr. 28)

La definición ostensiva explica el uso – el significado – de la palabra cuando el papel total de la palabra en el lenguaje es ya claro. (PI, párr. 30)

Quien llega a una tierra extranjera en ocasiones aprende el idioma de los nativos del lugar mediante las definiciones ostensivas que ellos les dan; y generalmente deberá adivinar cómo se deben interpretar estas definiciones y en ocasiones su adivinación es correcta, en otras no. (PI, párr. 32)

La definición ostensiva a la cual hace referencia Wittgenstein está basada en primera instancia en un gesto, aquel hecho por quien enseña dirigiéndose a quien está aprendiendo, indicando un objeto; la definición ostensiva puede servir para hacer aprender algo alrededor a la cosa concreta (nuez) o a algo abstracto (dos), como en nuestro caso. Estamos frente a una versión de la paradoja cognitiva. Lo cual nos vuelve a enviar, a nosotros y a Wittgenstein, a Agustín: “Agustín describe el aprendizaje del lenguaje humano igual que si el niño arribase en tierra extranjera y no comprendiese el idioma del país; en otras palabras: como si poseyese ya una lengua, pero no dicha lengua” (PI, I, párr. 32).

Pero Wittgenstein es aún más radical dado que llega a afirmar que no se trata sólo de la situación paradójica del aprender, sino que también involucra el enseñar: podemos significativamente indicar algo a alguien sólo al interior de un juego lingüístico, sólo con reglas compartidas; ni siquiera la frase banal “Esto es ...” se puede decir dando un sentido a lo dicho, muchas cosas deberían ser ya conocidas y concordadas (PI, I, párr. 31). En otras palabras, la enseñanza ostensiva presupone un lenguaje que el aprendiz no conoce; de otra parte, el éxito de la definición ostensiva exige el dominio individual de un lenguaje (Williams, 1999): “Se debe ya conocer (o ser capaces de hacer) algo para ser capaces de pedir el nombre de una cosa” (PI, I, párr. 30).

Para Wittgenstein la enseñanza ostensiva debe por tanto estar acompañada de una enseñanza sobre el uso del signo. Pero, el uso del signo está determinado por la práctica en la cual el signo está inmerso, por tanto presupone un contexto de dominio de un lenguaje (Williams, 1999).

Nos parece que las posiciones precedentemente ilustradas de Wittgenstein constituyen otro precedente de la paradoja cognitiva de Duval.

3.9. *Luis Radford*

Queremos aún recordar al lector que no es nuestra intención dar una lista exhaustiva de *todos* los estudiosos que han afrontado las problemáticas escondidas en aquella que hemos llamamos “paradoja cognitiva”; queremos sólo mostrar algunos antecedentes históricos, evidenciando aquellos autores que, más que otros, expresaron por escrito posiciones cercanas a aquellas descritas en la “paradoja”.

Pero no queremos silenciar una posición que no es precedente, sino sucesiva, dado que las palabras usadas por este autor, como veremos, son similares a aquellas usadas por Raymond Duval.

A modo de cierre, retomamos lo enunciado por Luis Radford: “El problema epistemológico se puede sintetizar en la siguiente pregunta: ¿Cómo podemos llegar al conocimiento de estos objetos generales, dado que no tenemos acceso a estos objetos sino a través de representaciones que nos hacemos de estos?” (Radford, 2005, p. 195).

Fuera de toda duda, la representación de los objetos en Matemática privilegia el uso de signos específicos; pero los signos son artefactos, objetos a su vez “lingüísticos” (en un sentido amplio), términos que tienen como objetivo representar para indicar: “¿Cuáles son los medios para mostrar el objeto? Son aquellos que denomino *medios semióticos de objetivación*. Son objetos, artefactos, términos lingüísticos, en general signos, que se utilizan para hacer visible una intención y para conducir a termine una acción” (Radford, 2005, p. 203).

El significado de un objeto emerge, por tanto, de los medios semióticos de objetivación, es decir, por signos, gestos, lenguajes, artefactos que permiten tomar conciencia subjetiva del objeto (Radford, 2003).

En la dirección de Radford (1997, 2002, 2003, 2004, 2005, 2006, 2013), específicamente socio-cultural, los objetos matemáticos son considerados como “modelos fijos” de actividad, “fijos” no en naturaleza, no en la mente, sino en la práctica social:

Desde el punto de vista de una antropología epistemológica, la forma en la cual yo considero que el enigma de los objetos matemáticos pueda ser resuelto es considerar los objetos matemáticos como modelos fijos de actividades incorporados en el reino siempre mutable de la práctica social mediata y reflexiva. (Radford, 2004, p. 21)

Y los signos están siempre incorporados en sistemas semióticos culturales, sistemas histórica y socialmente constituidos que incluyen las convicciones de una cultura y los modelos sociales de producción de significado. Los signos no son, en cualquier caso, meros indicadores de actividad mental, sino que son parte constitutiva del pensar y el conocimiento es concebido como el producto de una praxis reflexiva cognitiva mediada. En dicho enfoque, por tanto, el conocimiento es una forma de reflexión codificada histórica y culturalmente; los objetos de conocimiento son puras posibilidades que adquieren realidad solamente a través de la actividad, confundándose con esta. El aprendizaje, en cuanto proceso de objetivación, se confunde o se identifica con el proceso social de progresiva y crítica toma de consciencia de sistemas de ideas, significados culturales, formas de pensamiento, entre otros, incorporados en los medios semióticos de objetivación.

CONCLUSIÓN

La teoría y la práctica se funden en una admirable visión única y múltiple, cuando se inspiran la una en la otra. Colaboran, una para proponer problemas a la otra, la otra para pedir organizaciones y definiciones que no pueden depender de toda la gama posible de casos posibles.

Una situación que la práctica nos permite cuestionar es la siguiente: es relevante analizar el momento en el que una docente de pre-escolar presenta a sus estudiantes un objeto de madera, pintado de rojo con la forma de un cubo, denominándolo “cubo” (por tanto: una representación ostensiva y lingüística, una doble representación semiótica); y al día siguiente, al mostrar *otro* objeto de metal gris, brillante, con mayor volumen siempre en forma de cubo, llamándolo de nuevo ‘cubo’, se encontró frente a risas de niños que consideraban que la maestra los estaba engañando. Para los niños, *cubo* era la denominación de aquel objeto, “el objeto de ayer, rojo y de madera”.

¿Cómo ‘limpiar’ un significado de todas las componentes indéxales desviantes que todo objeto de la realidad concreta lleva consigo? ¿De qué sabor es una pirámide? ¿Qué olor tiene una recta? ¿Pesa más un ángulo o un número primo? Lejos de ser preguntas ligeras, estas son preguntas embarazosas de cierto espesor.

Sabemos que la equivalencia semántica o aquella semiótica son conquistas que, enunciadas por Platón, sólo ahora se comienzan a entender, pero estas equivalencias constituyen la base de la Matemática.

El estudiante indefenso, que tiene todo el derecho de ser *ignorante* en sentido etimológico, que debe construir cognitivamente los objetos de la Matemática, se ve obligado a confundir el objeto con su representación semiótica. Hemos mostrado desde diferentes corrientes filosóficas que esto tiene una explicación teórica y que no sólo depende de la voluntad del individuo. Esta es una contribución más al conocimiento y, sobre todo, a la construcción del conocimiento.

Kant toca el problema pero no lo estudia en profundidad. Para él, el ser humano que construye conocimiento es un adulto culto que sabe y que desea construir conocimiento, un adulto culto que sabe y que desea saber más; no examina el caso del joven, inmerso en una institución, que parte de bases muy diferentes. Pero nosotros, hoy sabemos que el bagaje de conocimiento que se construye está constituido por el objeto que el docente (o la institución) propone y pretende que se conozca y se construya, con toda la complicación semiótica que esto trae con sí, el lenguaje típico de la disciplina que juega un papel importante entre las teorías y las prácticas.

Una buena dosis de referencias filosóficas que ilustran la problemática, lejos de ser un ejercicio estéril de estilo analítico, es, por el contrario, una base sólida para fundamentar la cuestión.

Por otra lado, no somos los primeros en establecer relaciones entre lo que se conoce y lo que no se conoce: esta relación es posible sólo cuando lo que se ignora tenga al menos algo que ver con lo que constituye lo conocido; esta es una de las bases de la *Doctae Ignorantiae* de Nicola Cusano (1401 – 1464) (tomada en préstamo de Agustín, en realidad). En nuestra paradoja, si el objeto matemático es desconocido y de éste se nos presenta una representación semiótica en un determinado registro, lo que vemos, escuchamos, tocamos, olemos, probamos, es el objeto-representación no el objeto matemático en sí. Porque, precisamente, tenemos a disposición otras representaciones semióticas que constituyen aquello que para Cusano sería lo que tiene “al menos algo que ver con lo que constituye lo conocido”.

Y, dado que Husserl nos ha enseñado a valorizar la intención comunicativa, todo esto se relaciona con ciertas consideraciones famosas de Lev Seménovich Vygotsky (1896 – 1934) para quien el desarrollo en general y el desarrollo cognitivo del joven son netamente influenciados por el ambiente social, es decir, por las interacciones semióticas entre seres humanos (entre las cuales el lenguaje es privilegiado) al interno del ambiente con funciones y resultados muy diversos entre las interacciones adulto-joven y entre coetáneos. El desarrollo cognitivo se describe en términos de interacciones sociales, actividades mediadas e interiorizadas por formas culturales; el signo (lingüístico) ejerce aquí como

mediador entre el individuo y su contexto, además que hace de contenedor de significado; en particular, es un medio de transformación de las función psíquicas del individuo; es esto precisamente lo que permite el pasaje de los objetos de conocimiento del plano social al plano individual. La producción semiótica está, sin embargo, limitada al lenguaje.

En resumen y para cerrar este análisis teórico, la paradoja permanece porque no puede ser de otra forma; porque es ella parte de la realidad cognitiva.

AGRADECIMIENTOS

Los autores de este artículo expresen su agradecimiento a los tres revisores competentes anónimos quienes se mostraron generosos proponiendo modificaciones a las versiones precedentes.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Bagni, G. T. (2006). Eadem sunt, quae sibi mutuo substitui possunt, salva veritate. En S. Sbaragli (Ed.), *La matematica e la sua didattica: Vent'anni di impegno*. Actas del congreso internacional para los 60 años de Bruno D'Amore (pp. 34–37). Roma: Carocci Faber.
- Bagni, G. T. (2012). S. Agostino e la matematica. Ultima lezione di Giorgio T. Bagni nell'Ateneo di Treviso (15 mayo 2009). *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 35A-B(3), 217–227.
- Carruccio, E. (1964). Il valore ascetico della matematica nel pensiero di S. Agostino. *Studium*, 60, 868–870.
- Charles, D. (2000). *Aristotle on meaning and essence*. New York: Oxford University Press.
- D'Amore, B. (2000). “Concetti” e “oggetti” in matematica. *Rivista di matematica dell'Università di Parma*, 3(6), 143–151.
- D'Amore, B. (2001). Un contributo al dibattito su concetti e oggetti matematici: La posizione “ingenua” in una teoria “realista” vs il modello “antropologico” in una teoria “pragmatica”. *La matematica e la sua didattica*, 15(1), 31–56.
- D'Amore, B. (2003). *Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della didattica della matematica*. Prefacio de Guy Brousseau. Bologna: Pitagora. [Versión en idioma español: D'Amore, B. (2005). *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la didáctica de la matemática*. Prefacio de Guy Brousseau. Prefacio a la edición en idioma español de Ricardo Cantoral. México DF, México: Reverté-Relime].
- D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2001). Concepts et objets mathématiques. En A. Gagatsis (Ed.), *Learning in mathematics and science and educational technology*. Proceedings of the third intensive programme Socrates-Erasmus (pp. 111–130). Nicosia (Chipre): Intercollege.

- D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2012). Su alcune D in didattica della matematica: designazione, denotazione, denominazione, descrizione, definizione, dimostrazione. Riflessioni matematiche e didattiche che possono portare lontano. *Bollettino dei docenti di matematica*, 64, 33–46.
- D'Amore, B., & Matteuzzi, M. (1976). *Gli interessi matematici*. Venezia: Marsilio.
- D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., & Iori, M. (2013). *Primi elementi di semiotica. La sua presenza e la sua importanza nel processo di insegnamento-apprendimento della matematica*. Prefacios de Raymond Duval y Luis Radford. Bologna: Pitagora. [Edición en idioma español: D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., & Iori, M. (2013). *La semiótica en la didáctica de la matemática*, con prefacio a la edición española de Carlos Eduardo Vasco. Bogotá: Magisterio].
- Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-object. *Recherches en didactique des mathématiques*, 7(2), 5–31.
- Duval, R. (1993). Registres de représentations sémiotiques et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Science Cognitives*, 5(1), 37–65.
- Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne: Peter Lang.
- Duval, R. (1998a). Signe et objet (I): Trois grandes étapes dans la problématique des rapports entre représentations et objet. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 6(1), 139–163.
- Duval, R. (1998b). Signe et objet (II): Questions relatives à l'analyse de la connaissance. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 6(1), 165–196.
- Duval, R. (2006). Quelle sémiotique pour l'analyse de l'activité et des productions mathématiques? En L. Radford & B. D'Amore (Eds.), *Semiotics, Culture and Mathematical Thinking* [Special Issue]. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9(1), 45–81. Obtenido de <http://www.clame.org.mx/relime.htm>
- Duval, R. (2009a). «Objet»: un mot pour quatre ordres de réalité irréductibles? En J. Baillé (Ed.), *Du mot au concept: Objet* (pp. 79–108). Grenoble: PUG.
- Duval, R. (2009b). Sémiosis, pensée humaine et activité mathématique. *Amazônia - Revista de educação em ciências e matemáticas*, 6(11), 126–143. Obtenido de <http://www.periodicos.ufpa.br/index.php/revistaamazonia/index>
- Duval, R. (2011). *Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas*. São Paulo: Proem.
- Duval, R. (2012). Quelles théories et quelles méthodes pour les recherches sur l'enseignement des mathématiques? *Práxis educativa*, 7(2), 305–330. doi: 10.5212/PraxEduc.v.7i2.0001
- Eco, U. (1984). *Semiotica e filosofia del linguaggio*. Torino: Einaudi.
- Eco, U. (1986). Sign. En T. A. Sebeok (Ed.), *Encyclopedic dictionary of semiotics*. Berlin: Mouton de Gruyter.
- Eikeland, O. (2008). *The ways of Aristotle: Aristotelian phrónêsis, Aristotelian philosophy of dialogue, and action research*. Bern: Peter Lang Publishers.
- Frege, G. (1892). Über Sinn und Bedeutung. *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik*, 100(1), 25–50.
- Husserl, E. (1900). *Logische Untersuchungen. Erster Teil: Prolegomena zur reinen Logik*. Halle: Niemeyer.
- Husserl, E. (1901). *Logische Untersuchungen. Zweite Teil: Untersuchungen zur Phänomenologie und Theorie der Erkenntnis*. Halle: Niemeyer.
- Husserl, E. (1970). *Logical investigations* (J. N. Findlay, Trans.). London: Routledge and Kegan Paul. (Trabajo original publicado 1900-01).
- Leibniz, G. W. (1840). Dialogus de connexione inter res et verba, et veritatis realitate. In J. E. Erdmann (Ed.), *God. Guil. Leibnitii Opera philosophica quae exstant latina gallica germanica omnia* (Vol. 1, pp. 76–78). Berlin: Sumtibus G. Eichleri.

- Mensch, J. R. (2001). *Postfoundational phenomenology: Husserlian reflection on presence and embodiment*. University Park, PA: Penn State Press.
- Nöth, W. (1995). *Handbook of semiotics*. Bloomington, IN: Indiana University Press.
- Platón (1992). *Republica* (C. Eggers Lan, Trad.). Madrid: Gredos.
- Radford, L. (1997). On psychology, historical epistemology and the teaching of mathematics: Towards a socio-cultural history of mathematics. *For the learning of mathematics*, 17(1), 26–33.
- Radford, L. (2002). The seen, the spoken and the written: A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge. *For the learning of mathematics*, 22(2), 14–23.
- Radford, L. (2003). Gestures, speech and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical thinking and learning*, 5(1), 37–70.
- Radford, L. (2004). Cose sensibili, essenze, oggetti matematici ed altre ambiguità. *La matematica e la sua didattica*, 18(1), 4–23.
- Radford, L. (2005). La generalizzazione matematica come processo semiotico. *La matematica e la sua didattica*, 19(2), 191–213.
- Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. En L. Radford & B. D'Amore (Eds.), *Semiotics, Culture and Mathematical Thinking* [Special Issue]. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9(1), 103–129. Obtenido de <http://www.clame.org.mx/relime.htm>
- Radford, L. (2013). Three key concepts of the theory of objectification: knowledge, knowing and learning. *Journal of research in mathematics education*, 2(1), 7–44. doi: 10.4471/redimat.2013.19
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflection on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational studies in mathematics*, 22(1), 1–36.
- Spinicci, P. (2002). *Lezioni sulle Ricerche filosofiche di Ludwig Wittgenstein*. Milano: CUEM.
- Stöckl, A. (1887). *Handbook of the history of philosophy. Part one: Pre-Scholastic philosophy* (Finlay T. A., Trans.). Dublin: M. H. Gill and Son.
- Versteegh, C. H. M. (1977). *Greek elements in Arabic linguistic thinking*. Leiden: E. J. Brill.
- Williams, M. (1999). *Wittgenstein, Mind and Meaning: Toward a social conception of mind*. London and New York: Routledge.
- Wittgenstein, L. (1913). *Philosophische Grammatik*. Oxford: Basil Blackwell.
- Wittgenstein, L. (1922). *Tractatus Logico-Philosophicus* (F. P. Ramsey & C. K. Ogden, Eds.). London: Routledge & Kegan Paul. (Trabajo original publicado 1921).
- Wittgenstein, L. (1953). *Philosophische Untersuchungen* (G. E. M. Anscombe & R. Rhees, Eds.). Oxford: Blackwell.
- Wittgenstein, L. (1958). *The Blue and Brown Books*. Oxford: Blackwell.

Autores

Bruno D'Amore. Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia y Universidad de Bologna, Italia. bruno.damore@unibo.it

Martha Isabel Fandiño Pinilla. Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia y Universidad de Bologna, Italia. bruno.damore@unibo.it

Maura Iori. Universidad de Palermo, Italia. maura@iori-maura.191.it

Maurizio Matteuzzi. Universidad de Bologna, Italia. maurizio.matteuzzi@unibo.it